Ein mathematischer Weg von Schaffhausen nach Neuhausen am Rheinfall

Anregungen zu einem mathematischen Rundgang

Aufgabenideen von Fabienne Schindler,
Studentin
der **Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd**

Bearbeitet von Verena Schmidt
Herausgegeben von Prof. Dr. Astrid Beckmann

im Jahr der Mathematik 2008

Inhaltsverzeichnis:

1. <u>Stadtplan von Schaffhausen</u> Seite 3

2. <u>Wegplan von Schaffhausen zum Rheinfall</u> Seite 4

3. <u>Stationen:</u>

- 1. Station – Bahnhof Seite 5
- 2. Station – Munot Seite 6
- 3. Station – Innenstadt I Mohrenbrunnen Seite 8
- 4. Station – Innenstadt II Kirche St. Johann Seite 9
- 5. Station – Qualität des Wassers Seite 10
- 6. Station – Skaterplatz Seite 12
- 8. Station – Rhein 2 Seite 13
- 9. Station – Rheinfall Seite 14

4. <u>Lösungsvorschläge:</u>

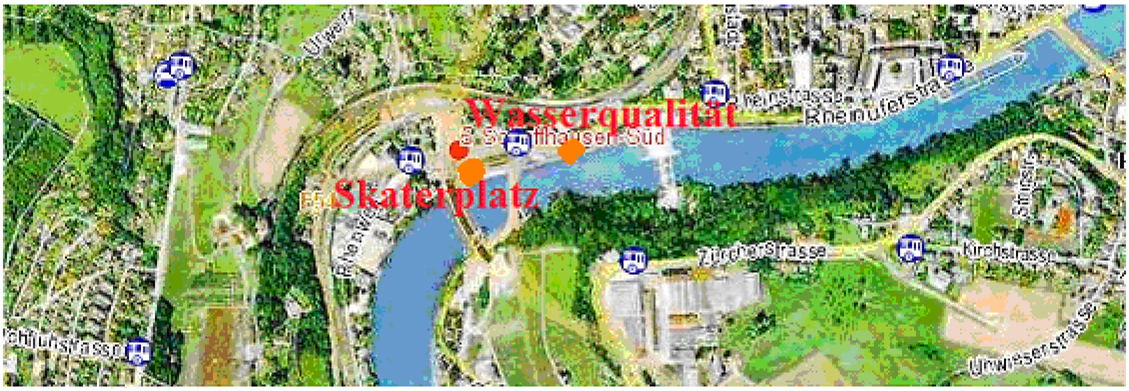
- 1. Station – Bahnhof Seite 16
- 2. Station – Munot Seite 20
- 3. Station – Innenstadt I Mohrenbrunnen Seite 24
- 4. Station – Innenstadt II Kirche St. Johann Seite 26
- 5. Station – Qualität des Wassers Seite 27
- 6. Station – Skaterplatz Seite 27
- 7. Station – Rhein 1 Seite 38
- 8. Station – Rhein 2 Seite 29
- 9. Station – Rheinfall Seite 31

5. <u>Literatur- und Abbildungsverzeichnis</u> Seite 36

1. Stadtplan von Schaffhausen

Abbildung 1

2. Wegplan von Schaffhausen zum Rheinfall



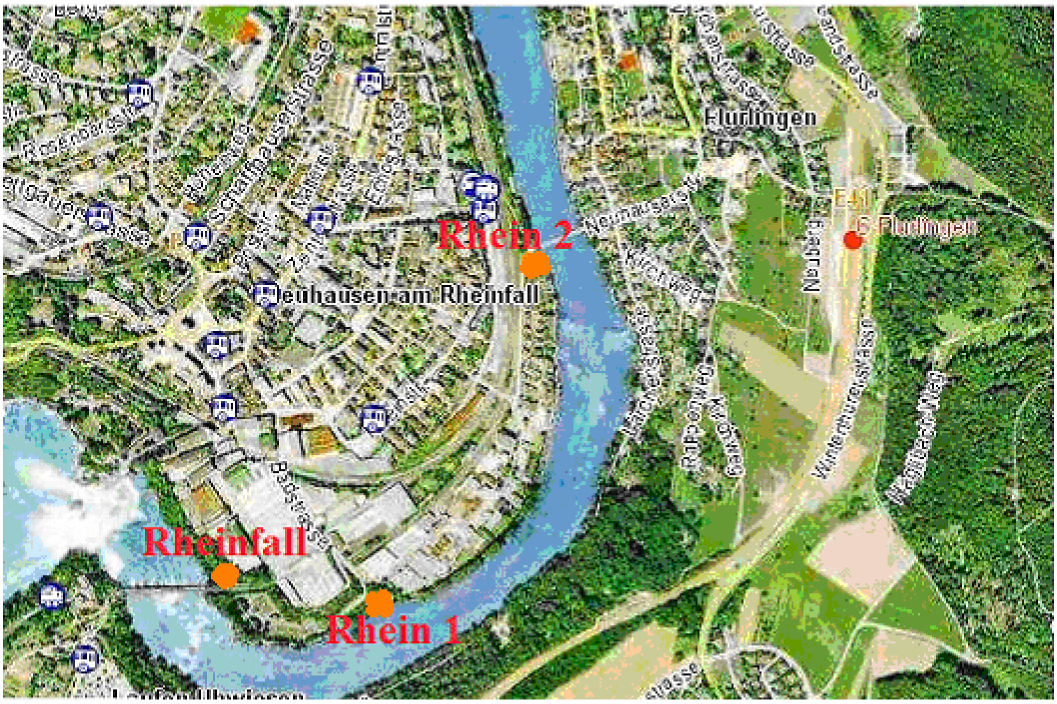


Abbildung 2

3. Stationen

1. Station - Bahnhof

Plane eine Reise

Wir stehen hier am Bahnhof in Schaffhausen.
Ihr sollt für eine 4 köpfige Familie (2 Erwachsene, 2 Kinder 3 Jahre und 11 Jahre) die günstigste und die teuerste Reise nach Stuttgart oder in eine Stadt eurer Wahl zusammenstellen.
Plane die Reise genau. Achte auf die Abfahrts- und die Ankunftszeiten.

Welche Möglichkeiten gibt es?
Wie viel Prozent liegen das günstigste und das teuerste Angebot auseinander?

Tipp!

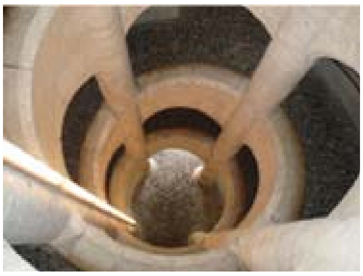
Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, um den Fahrplan abzulesen (Anzeigetafel, Abfahrtsaushang und am Schalter).
Denkt, daran, dass es verschiedene Sparmöglichkeiten gibt. Dies könnt ihr auch am Schalter nachfragen oder an den Automaten nachschauen.

2. Station – Munot

1. Zinne

Die kreisrunde Zinne (Plattform) auf dem Munot wird häufig für Feste und Empfänge genutzt. Von hier aus hat man einen prächtigen Blick auf die Stadt.

Erfinde selbst eine Aufgabe, die sich auf diese kreisrunde Plattform auf dem Munot bezieht.
Setzt euch anschließend in 4er Gruppen zusammen und stellt euch gegenseitig eure Aufgaben und versucht diese zu lösen.



2. Tausend und ein Stein

Im Innern des Turmes befindet sich ein gewundener nach oben strebender Gang. Dieser ist mit kleinen Steinen bepflastert.

Wie viele Steine sind es von einer bis zur nächsten Schießscharte?
Schätze zuerst und suche dann eine Möglichkeit die Anzahl herauszufinden.

→ Nicht jeden Stein einzeln zählen!

3. Für ganz Schnelle

Wie groß ist der Steigungswinkel?

Auf dem Weg zum Munot muss man viele Stufen überwinden und somit auch viele Höhenmeter.

Wie viele Höhenmeter sind es genau?

Versuche dies anhand der richtigen Stufenmaße herauszufinden.

Wie viele Meter legst du in der Ebene eigentlich zurück, wenn es keine Stufen gäbe?

Tipp!

Stelle dir die Treppe wie ein Dreieck vor! Fertige zur Hilfe eine Skizze und eine maßstabsgetreue Zeichnung an.

Schätze den Winkel zuerst und miss dann nach!

3. Station - Innenstadt 1

Mohrenbrunnen

Der große Brunnen auf dem Fronwagplatz hat mehrere Ecken.

a) Berechne das Wasservolumen im Brunnen.

b) Wenn das Wasser im Brunnen um 4 cm steigen soll, wie viel Steine müssen dann hinein geworfen werden?

c) Zusatzaufgabe: Berechne die größtmögliche Wassermenge, die der Brunnen fassen kann.

Miss die für die Berechnung wichtigen Größen.

4. Station - Innenstadt 2

Kirche St. Johann

Die Kirche St. Johann ist die älteste Pfarrkirche der Stadt. Sie zählt außerdem zu den größten Pfarrkirchen der Schweiz.

a) Skizziere die Kirche freihändig. Achte dabei auf die Richtungen und die Größenverhältnisse.

b) Zu welcher Stilepoche gehört die Kirche?
Nenne Merkmale.

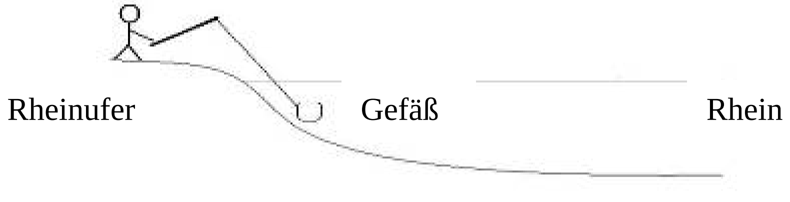
5. Station - Qualität des Wassers

Wir werden an bestimmten Stellen am Rhein die Wasserqualität bestimmen. Dazu werden Proben des Wassers genommen und später unter dem Mikroskop untersucht.

Versucht die folgenden Fragen zu beantworten:

a) Was versteht man überhaupt unter Wasserqualität?
b) Weshalb ist die Wasserqualität wichtig?
c) Was kann man selbst, tun um die Wasserqualität zu verbessern?

<u>Versuchsanordnung:</u>



6. Station - Skaterplatz




<u>Hier siehst du zwei unterschiedliche Pipes.</u>

1. Beschreibe sie mathematisch, zum Beispiel durch geometrische Körper, Flächen, Kurven, Winkel usw.. Schreibe möglichst viel dazu auf.
2. Zerlege sie gedanklich in ihre einzelnen Elemente und zeichne die Netze.
3. Vergleiche die Bewegungen beim Herabfahren auf den beiden Pipes. Gibt es Unterschiede? Welche?

Tipp!

Die richtigen Größen kannst du direkt von den Objekten entnehmen.

7. Station - Station Rhein 1

1. Wie schnell fließt der Rhein?

Versucht in Zweiergruppen diese Aufgabe zu lösen.
Schätzt erst einmal und dann berechnet genauer.
Verschiedene Hilfsmittel stehen euch zu Verfügung.

2. Wie hoch ist der Baum?

Hast du eine Idee, wie man die Höhe des Baumes berechnen könnte?

8. Station - Rhein 2

Einspurige Brücke

Die Stadtverwaltung will die Ampel auf dieser einspurigen Brücke neu schalten.

Es sollen so viele Fahrzeuge wie möglich darüber fahren können.

Versuche diese Aufgabe alleine zu lösen.

Wie muss die Ampel geschaltet werden, wenn auch LKW darüber fahren?

9. Station - Rheinfall

1. Die Brücke

Die Brücke, die die Schaffhauser Seite mit der Zürcher Seite verbindet, soll neu gestrichen werden. Es sollen die Seiten- und die Bodenflächen der Brücke gestrichen werden. Die Pfeiler werden ausgespart.

a) Wie groß ist die Fläche, die gestrichen werden soll?

b) Stelle das Angebot so zusammen, dass die Farbe auf alle Fälle ausreicht und die Kosten am geringsten sind.

<u>Eine Handelskette bietet Fassadenfarbe im Angebot an:</u>

Verbrauch 1 Liter für ca. 5m^2

90,0 l	(150,20€)
250,0 l	(326,80€)
599,0 l	(699,90€)

! ACHTUNG !

Nicht über die Gleise laufen!!!

2. Volumen des Rheinfalls

Wie viele Badewannen könnten mit dem Wasser, das in einer halben Stunde über den Rheinfall abfließt, gefüllt werden?

Berechne dies für Sommer und Winter.

4. Lösungsvorschläge:

1. Station - Bahnhof

Fragen, die ich mir am Anfang gestellt habe:

Welche Faktoren spielen eine Rolle?

Wo kann ich überall Informationen sammeln?

Welche Möglichkeiten gibt es mit dem Zug zu fahren?
Ab welchem Alter muss für Kinder bezahlt werden?
Wie hoch ist der Rabatt auf ein Ticket für Kinder?
Welche Sparmöglichkeiten gibt es?

Ausführliches Lösungsbeispiel:
Bahncard 25- Kosten: 53 € für die 2. Klasse
Besonderheit: Alle Kinder unter 18 Jahren sowie der Ehepartner erhalten die Bahncard 25 für nur 5 €.
Bahncard 50- Kosten: 212 € für die 2. Klasse
Besonderheit: Kinder unter 18 Jahren, sowie der Ehepartner erhalten die Bahncard 50 zum halben Preis. Kinder ab 6 Jahren brauchen eine Fahrkarte. Diese kostet nur den halben Fahrpreis.
Reise mit RE/ RB/ IRE:
Was kostet eine Fahrt nach Stuttgart regulär? 29,30€
Wie lange dauert die Reise? 3 Stunden
Abfahrtszeiten in Schaffhausen und Ankunftszeiten in Stuttgart? Alle 2 Stunden;
Abfahrtszeit des ersten Zuges: 8.42Uhr; Ankunftszeit des ersten Zuges: 11.42Uhr
Abfahrtszeit des letzten Zuges: 16.42Uhr; Ankunftszeit des letzten Zuges: 19.42Uhr
Reise mit dem ICE:
Was kostet eine Fahrt nach Stuttgart regulär? 35€
Wie lange dauert die Reise? 2 Stunden und 4 Minuten
Abfahrtszeiten in Schaffhausen und Ankunftszeiten in Stuttgart? Alle 2 Stunden;
Abfahrtszeit des ersten Zuges: 7.52Uhr; Ankunftszeit des ersten Zuges: 9.56Uhr

Abfahrtszeit des letzten Zuges: 17.52Uhr; Ankunftszeit es letzten Zuges: 19.56Uhr

Die Familie besteht aus 2 Erwachsenen und 2 Kindern (3 und 11 Jahre alt).

Zunächst werde ich eine Reise mit dem RE/ RB/ IRE zusammenstellen.

Zum regulären Fahrpreis: Für 2 Erwachsene kostet die Fahrt: $2 \cdot 29{,}30 = 58{,}60[€]$

Kinder zahlen erst ab 6 Jahren und dann auch nur den halben Preis

Für das 11 jährige Kind kostet die Fahrt: $29{,}30 \div 2 = 14{,}65[€]$

Also kostet die Fahrt für die gesamte Familie: $58{,}60 + 14{,}65 = 73{,}25[€]$

Mit Bahncard 25

a) nur ein Erwachsener besitzt die Bahncard 25

Ein Erwachsener mit Bahncard bezahlt für die Fahrt: $29{,}30 \cdot 0{,}75 = 21{,}98$ [€] also etwa 22€

Ein Erwachsener und ein Kind bezahlen regulär: $29{,}30 + 14{,}65 = 43{,}95[€]$

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 25: 22 + 43,95 = 65,95[€]

Die Reise kostet also zuzügl. der Kosten für die Bahncard 25: 22+ 43,95 + 53 =118,95[€]

b) ein Erwachsener besitzt die Bahncard 25 und der Ehepartner und ein Kind besitzen eine reduzierte Card für 5€

Zwei Erwachsene mit je einer Bahncard 25 bezahlen für die Reise: $58{,}60 \cdot 0{,}75 = 43{,}95$ [€] also etwa 44€

Ein Kind bezahlt mir der Bahncard 25: $14{,}65 \cdot 0{,}75 = 10{,}98$ [€] also etwa 11€

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 25: 44 + 11= 55[€]

Die Reise kostet zuzügl. der Preise für die Bahncards 25: 44 + 11 + 53 + $2 \cdot 5$ = 118[€]

Mit Bahncard 50

a) nur ein Erwachsener besitzt die Bahncard 50

Eine Fahrt kostet mit der Bahncard 50 für einen Erwachsenen: $29{,}30 \cdot \frac{1}{2}$ = 14,65[€]

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 50: $2 \cdot 14{,}65$ + **29,30= 58,60[€]**

Also kostet die Fahrt zuzüglich der Kosten für die Bahncard 50:

$2 \cdot 14{,}65$ +29,30+212= 270,60[€]

b) ein Erwachsener besitzt die Bahncard 50 und der Ehepartner und ein Kind besitzen eine Bahncard 50 zum halben Preis

Zwei Erwachsene mit je einer Bahncard 50 bezahlen für die Reise: $2 \cdot 14{,}65$ = 29,30[€]

Ein Kind bezahlt mir der Bahncard 50: $14{,}65 \cdot \frac{1}{2}$ = 7,32[€] also 7,35€

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 50: 29,30 + 7,35 = 36,65[€]

Die Reise kostet zuzüglich der Preise für die Bahncards 50:

29,30 + 7,35 + 212 + $2 \cdot 106$ = 460,65[€]

Nun werde ich die Reise mit dem ICE planen und zum Schluss die Ergebnisse miteinander vergleichen.

<u>Zum regulären Fahrpreis</u>

Zwei Erwachsene bezahlen für die Reise regulär: $2 \cdot 35$ = 70[€]

Ein Kind bezahlt für die Fahrt: $35 \cdot \frac{1}{2}$ = 17,50[€]

Die Reise kostet im ICE regulär für die Familie: 70 + 17,50 = 87,50[€]

<u>Mit Bahncard 25</u>

a) *nur ein Erwachsener besitzt die Bahncard 25* $35 \cdot 0{,}75 = 26{,}25$ []

Ein Kind und ein Erwachsener bezahlen für die Reise: 17,50 + 35 = 52,50[€]

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 25: 26,25 + 52,50 = 78,75[€]

Die Reise kostet zuzüglich der Preise für die Bahncard 25:

26,25 + 52,50 + 53 = 131,75[€]

b) *ein Erwachsener besitzt die Bahncard 25 und der Ehepartner und ein Kind besitzen eine reduzierte für 5€*

Zwei Erwachsene mit je einer Bahncard 25 bezahlen für die Reise: $70 \cdot 0{,}75 = 52{,}50$ [€]

Ein Kind bezahlt mit der Bahncard 25: 17,50 – 25% = 13,13[€] also etwa 13,15€

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 25: 52,50 + 13,15 = 65,65[€]

Die Reise kostet zuzüglich der Preise für die Bahncards 25:

52,50 + 13,15 + 53 + $2 \cdot 5$ = 128,65[€]

M<u>it Bahncard 50</u>

a) *nur ein Erwachsener besitzt die Bahncard 50*

Eine Fahrt kostet mit der Bahncard 50 für einen Erwachsenen: $35 \cdot \frac{1}{2}$ = 17,50[€]

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 50: $2 \cdot 17{,}50$ **+ 35 = 70[€]**

Also kostet die Fahrt zuzügl. der Kosten für die Bahncard 50:

$2 \cdot 17{,}50$ + 35 + 212 = 282[€]

b) *ein Erwachsener besitzt die Bahncard 50 und der Ehepartner und ein Kind besitzen eine Bahncard 50 zum halben Preis*

Zwei Erwachsene mit je einer Bahncard 50 bezahlen für die Reise: $2 \cdot 17{,}50$ = 35[€]

Ein Kind bezahlt mir der Bahncard 50: $17{,}50 \cdot \frac{1}{2}$ = 8,75[€]

Die Reise kostet also ohne der Kosten für die Bahncard 50: 35 + 8,75 = 42,75[€]

Die Reise kostet zuzügl. der Preise für die Bahncard 50:

35 + 8,75 + 212 + $2 \cdot 106$ = 467,75[€]

	RE/ RB/ IRE	RE/ RB/ IRE zuzüglich der Kosten für die Bahncard	ICE	ICE zuzüglich der Kosten für die Bahncard
Regulär	73,25 €	73,25 €	87,50 €	87,50 €
mit Bahncard 25	65,95 €	118,95 €	78,75 €	131,75 €
alle besitzen eine Bahncard 25	55 €	118 €	65,65 €	128,65 €
mit Bahncard 50	58,60 €	270,60 €	70 €	282 €
alle besitzen eine Bahncard 50	36,65 €	450,65 €	42,75 €	467,75 €

In der Tabelle sind nun alle Preise gegenübergestellt.
Es wird sichtbar, dass es sich nicht lohnen muss, wenn jedes Familienmitglied eine eigene Bahncard 25 oder 50 besitzt. Wenn die Familie allerdings oft eine Reise mit dem Zug unternimmt, dann lohnt sich die Anschaffung einer Bahncard.
Ich würde der Familie raten, wenn sie ab und zu mit der Bahn reisen, dass sie sich für jedes Familienmitglied eine Bahncard 25 zulegen, denn dies ist günstiger als wenn nur ein Erwachsener eine besitzt. Dann ist es auch egal, ob sie mit dem RE oder mit dem ICE unterwegs sind. Der Preisunterschied ist relativ gering.
Für welches Angebot sich die Familie entscheiden, kommt darauf an, ob sie bereits eine oder mehrere Bahncards besitzen.
Die Preise liegen nicht sehr weit auseinander. Ein weiterer Aspekt ist auch die Fahrzeit. Mit RE/RB/IRE dauert die Fahrt 3 Stunden. Mit dem ICE dauert die Reise nur 2 Stunden und 4 Minuten und somit fast eine Stunde weniger.

Prozentualer Vergleich

Jetzt ist es interessant zu wissen wie viel Prozent das günstigste vom teuersten Angebot auseinander liegen. Günstigstes Angebot → 36,65 €, Teuerstes Angebot → 87,50 €

$36{,}65 \div 87{,}50 = 0{,}419 \qquad 0{,}42 \cdot 100 = 41{,}9[\%]$

Das günstigste und das teuerste Angebot liegen fast 42% auseinander.
Bei der oberen Berechnung wurden die Angebote gewählt, bei denen die Familie die Bahncard schon besitzen. Müssten erst noch eine oder mehrere Bahncards gekauft werden, so würde das günstige Angebot von 36,65€ dann 450,65€ kosten und wäre damit das zweit teuerste Angebot aus der Tabelle.

2. Station – Munot

→ Zinne

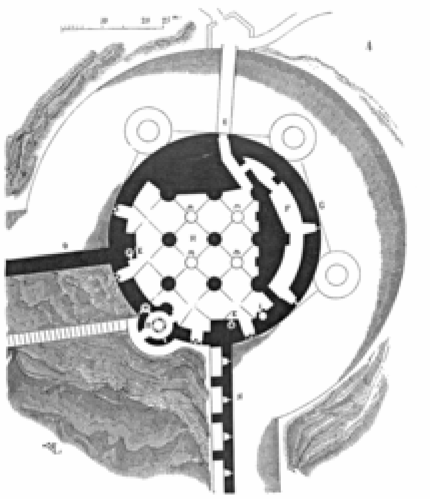
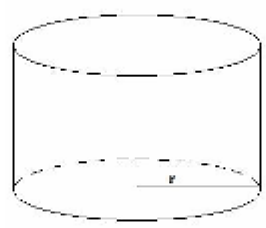


Abb. Munot von oben[1]

<u>Die Stadtverwaltung Schaffhausen will aus der Zinne ein Schwimmbad bauen.</u>

Welches Volumen hat das Becken?

Wie viel Liter Wasser passen in das Becken?



Die Zinne hat einen Radius von etwa 30 Schritten. Bei meiner Schrittlänge entspricht dies etwa 44cm. Also beträgt der Radius etwa $30 \cdot 0{,}44 = 13{,}20[m^2]$

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Plan.bastion.boulevard.Schaffhausen.png

Und somit beträgt der Flächeninhalt:

$A = \pi \ r^2$

$A = \pi \cdot 13{,}2^2$

$= 547{,}4[m^2]$

Die Plattform ist von einer unterschiedlich hohen Mauer umgeben. An der niedrigsten Stelle ist die Mauer 1,10 m hoch. Deshalb wird das Schwimmbecken auch nur maximal 1,10 m tief werden, da sonst Wasser auslaufen würde oder die Mauer an dieser Stelle erhöht werden müsste.

Daraus folgt das Volumen: $V = \pi \ r^2 \ h$, $V = \pi \cdot 13{,}2^2 \cdot 1{,}1 = 604{,}13 \ [m^3]$

→ Tausend und ein Stein

Mit Papier lege ich einen Rahmen in einer bestimmten Größe auf den Steinboden. Als Nächstes zähle ich die Anzahl der Steine in diesem Quadrat (in meinem Fall: etwa 23 Steine)

Die Schießscharten haben die Form eines halben Kreises. Ihren Flächeninhalt erhält man mit der halben Formel für den Flächeninhalt von Kreisen. Der Durchmesser ist direkt am Boden messbar.

Nun messe ich den Flächeninhalt des gewundenen Weg im Innern des Munots. Bei meinen Berechnungen komme ich auf eine Länge von 9,20m und eine Breite von 1,80m. Dazu noch der Flächeninhalt der beiden Schießscharten. Ihr Durchmesser beträgt 2,70m.

Nun muss man nur noch die Anzahl der Steine in der kleinen Fläche „hochrechnen" und die Auswölbungen, die es immer bei den „Schießscharten" gibt noch dazu addieren.

Der Flächeninhalt des Weges beträgt $9{,}20 \cdot 1{,}80 = 16{,}56 \ [m^2]$

Der Flächeninhalt der Schießscharten beträgt (Formel: $A = \pi r^2; \frac{\pi d^2}{4}$)

$d = 2{,}70m \rightarrow r = 1{,}35m$; $A = \pi \cdot 1{,}35^2$ = **$2{,}4 \ [m^2]$**

Der gesamte Flächeninhalt beträgt dann

$16{,}56 + 2{,}4 =$ **18,96 [m²]**

Der Flächeninhalt meines kleinen Quadrates beträgt

$A = 0{,}295^2 =$ **0,087 [m²]**

Nun dividiert man den Flächeninhalt des kleinen Quadrates mit dem gesamten Flächeninhalt.

<u>Wie oft passt die kleine in die große Fläche?</u>

$= 18{,}96 \div 0{,}087$

$= 217{,}93$

In diesem kleinen Quadrat sind ja 23 Steine, also beträgt die Anzahl der gesamten Steine:

$23 \cdot 217{,}93 = 5012{,}39$

$\rightarrow$ **also etwa 5012 Steine.**

→ Zusatzaufgabe für ganz Schnelle

Gesucht ist der Steigungswinkel. In dieser Klassenstufe haben die Schüler Sinus, Kosinus und Tangens noch nicht kennen gelernt.
Zur Vereinfachung sollen sich die Schüler die Treppe wie ein Dreieck vorstellen. Dadurch erhalten sie einen Überblick, welche Größen bekannt sind bzw. welche zur Lösung fehlen.
Es gibt dann die Möglichkeit ohne Tangens diesen Winkel herauszufinden. Zur Vereinfachung sollen die Schülerinnen und Schüler diesen Winkel zuerst schätzen und dann abmessen. Am einfachsten ist es zuerst die Höhenmeter herausbekommen. Dazu werden die Stufen gezählt, diese in Blöcke geteilt und zusammengezählt. Unter Block verstehe ich eine Anzahl von Stufen bis zur nächsten „großen" Stufe. Die Schüler kommen mit Hilfe der Stufentiefe zu der gesuchten Länge.
In vorliegenden Fall hat ein Block 18 und 17 Stufen. Es gibt 3 Blöcke mit 17 Stufen und 4 Blöcke mit 18 Stufen.

Maße einer Stufe: Höhe: 13cm; Breite/Tiefe: 45cm

Eine „große" Stufe ist bei gleicher Höhe 1,50m tief.

Insgesamt gibt es 7 große Stufen.

Ein Block à 17 Stufen ist 2,21m hoch + Höhe der großen Stufe

$\rightarrow$ Die Höhe beträgt 2,34m.

Ein Block à 18 Stufen ist 2,34m hoch + Höhe der großen Stufe

$\rightarrow$ Die Höhe beträgt 2,47m.

Also betragen die Höhenmeter:

$(3\cdot)$ Höhe von Block á 17 Stufen $+$ $(4\cdot)$ Höhe von Block á 18 Stufen.

Rechnung:

$3\cdot 2{,}34 + 4\cdot 2{,}47$ = Höhenmeter gesamt

7,02 $+$ 9,88 = 16,9 [m]

Im nächsten Schritt wird die gesamte Tiefe der Stufen berechnet.
Eine Stufe ist 45cm tief, die große Stufe 1,50m.

Ein Block á 17 Stufen ist somit $(17\cdot 45cm)+$ die Tiefe der großen Stufe

$\rightarrow$ Somit ist ein Block á 17 Stufen $(17\cdot 45cm)+$ 1,50m = 9,15m

Ein Block á 18 Stufen ist somit $(18\cdot 0{,}45cm)+$ die Tiefe der großen Stufe

$\rightarrow$ Somit ist ein Block á 18 Stufen $(18\cdot 0{,}45cm)$ $+$ 1,50m = 9,60m

Also beträgt die gesamte Tiefe der Treppe:

$(3\cdot)$ Tiefe von Block á 17 Stufen $+(4\cdot)$ Tiefe von Block á 18 Stufen.

Rechnung:

$3\cdot 9{,}15 + 4\cdot 9{,}60$ = Tiefe gesamt

27,45 $+$ 38,40 = 65,85[m]

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann nun auch die dritte Seite berechnet werden:

$16{,}90^2 + 65{,}85^2 = a^2$

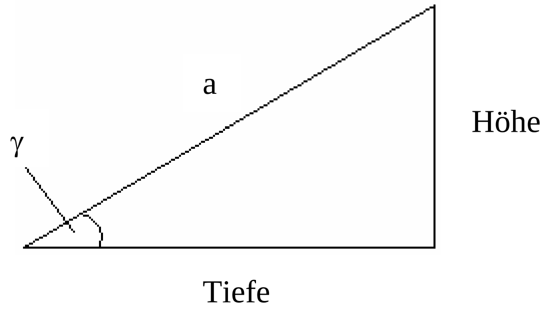
$285{,}61 + 4336{,}22 = a^2$

a = 67,98[m]

Wenn der Satz des Pythagoras noch nicht bekannt ist, gibt es auch die Möglichkeit, einfach eine maßstabsgetreue Zeichnung anzufertigen und die Seite daran abzumessen. Damit kann dann auch der Winkel abgelesen bzw. abgemessen werden.

Größe des Winkels$\rightarrow$ 13º

Skizze:



3. Station – Innenstadt I Mohrenbrunnen

<u>Zunächst entnehme ich die entsprechenden Maße direkt am Brunnen:</u>

Breite eines Seitenstückes des Brunnen 2,10 m (Außenkante)

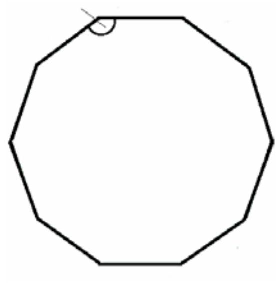
Höhe des Brunnens 0,75 m

Dicke/ Breite der Mauer 0,23 m

Abstand des Wasserspiegels bis zum Ende der Mauer 0,10 m.

<u>Skizze:</u>

<u>Innenwinkelsumme des 10- Eck</u>



$$(n-2)\cdot 180°$$

$$(10-2)\cdot 180° = 1440°$$

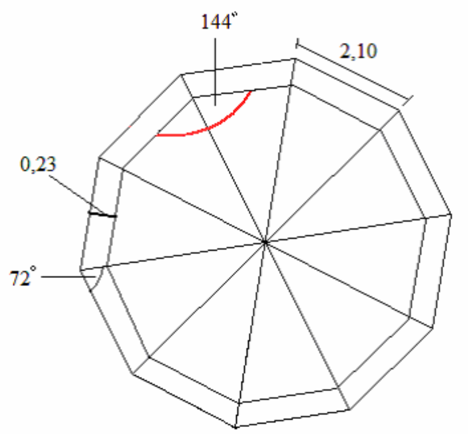
<u>Ein Winkel ist also:</u>

$1440° \div 10 = 144°$ groß.

Flächeninhalt des 10- Ecks berechne ich über den Flächeninhalt eines Teildreieckes multipliziert mit der Anzahl dieser Teildreiecke.

<u>Skizze:</u>

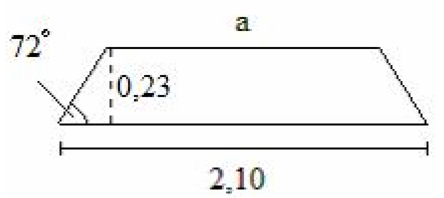
10- Eck mit Teildreiecken

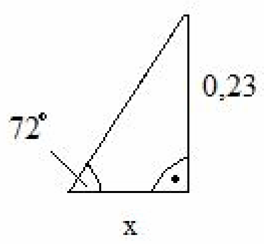


<u>Flächeninhalt eines Teildreieckes ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe:</u>

$$A = \frac{(a\cdot h_a)}{2} = \frac{(b\cdot h_b)}{2} = \frac{(c\cdot h_c)}{2}$$

<u>Innenkante des Brunnens:</u>

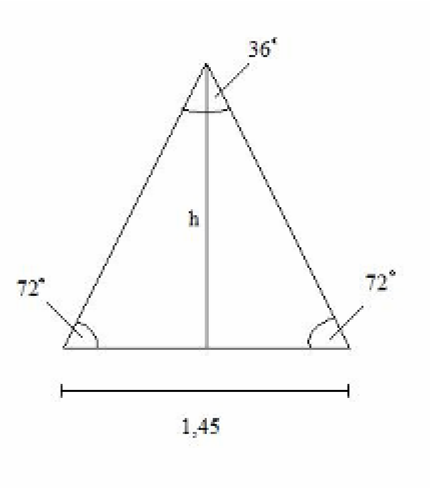




$$x = \frac{0{,}23}{\tan 72°} \qquad \tan 72° = \frac{0{,}23}{x}$$
$$= 0{,}075$$
$$a = 2{,}10 - 2 \cdot 0{,}075$$

<u>Höhe des Teildreiecks:</u>

Gleichschenkliges Dreieck



$$\tan 72° = \frac{h}{1{,}95 \div 2}$$
$$h = \frac{1{,}95}{2} \cdot \tan 72° = 3{,}00[m]$$

<u>Flächeinhalt des Teildreiecks:</u>

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$
$$A = \frac{1{,}95 \cdot 3{,}00}{2} = 2{,}925[m^2]$$

<u>Gesamtfläche:</u>

$$A_{gesamt} = 10 \cdot A$$
$$A_{gesamt} = 10 \cdot 2{,}925 = 29{,}25[m^2]$$

<u>Volumen:</u>

$$V = A_{gesamt} \cdot h$$
$$V = 29{,}25 \cdot 0{,}75 = 21{,}94[m^3]$$

Bei der Teilaufgabe b) ist gefragt, wie viele Steine in den Brunnen geworfen werden müssen, damit der Wasserspiegel um 4cm steigt.

<u>Welche Maße haben die Steine?</u>

Zur Vereinfachung sollen sich die Schülerinnen und Schüler einen Stein auswählen. Angenommen der Stein hat die Maße 10 x 10 x 20cm.

Wie groß ist das Volumen bei gleichem Flächeninhalt und einer Höhe/ Tiefe von 4cm?

Berechnung des Volumens:

$V = 29{,}25 \cdot 0{,}04 = 1{,}17$ [m^3]

Volumen eines Steines:

$10 \cdot 10 \cdot 20$

= $2000 cm^3$

= $0{,}002 m^3$

Anzahl der Steine:

$1{,}17 \div 0{,}002 = 585$ [Steine]

Es müssten 585 Steine mit diesen Maßen ins Wasser geworfen werden, damit der Wasserspiegel um 4cm steigt.

(Teilaufgabe c) ist wie Teilaufgabe a) zu lösen jedoch mit der Höhe des Brunnens und nicht mit dem Wasserstand.)

4. Station – Innenstadt 2 Kirche St. Johann

Die Kirche St. Johann befindet sich am Kirchhofplatz.

Ich fertige zuerst eine Skizze aus einer interessanten Perspektive der Kirche an. Das Skizzieren zwingt mich dazu, genau hinzusehen und auf Kleinigkeiten zu achten.

Beim Gang in die Kirche versuche ich den Grundriss zu erfassen.
Welche Form hat er?
Wie sieht die Decke aus? Stuck? Deckenmalerei?
Welche Form haben die Fenster? Spitzbogen oder Rundbogen? Rundfenster? Maßwerk?
Hallenkirche? Gibt es Seitenschiffe? Oder nur ein Hauptschiff? Gibt es Strebepfeiler?
Aufgrund der vielen eher romanischen Merkmale wie Grundriss, die kleinen Fenster und die wenigen Verzierungen und Ornamente, vermute ich, dass die ursprüngliche Kirche eine romanische ist.
Da ich allerdings schon weiß, dass die Kirche mehrmals umgebaut wurde, erkenne ich auch gotische Stilmerkmale. Hier sind vor allem die gotischen Spitzbögen bei den Fenstern zu erwähnen wie auch die großräumige, helle Kirche. Gegen die Gotik spricht vor allem, dass keine Strebepfeiler vorhanden sind und es kein Netzgewölbe gibt.

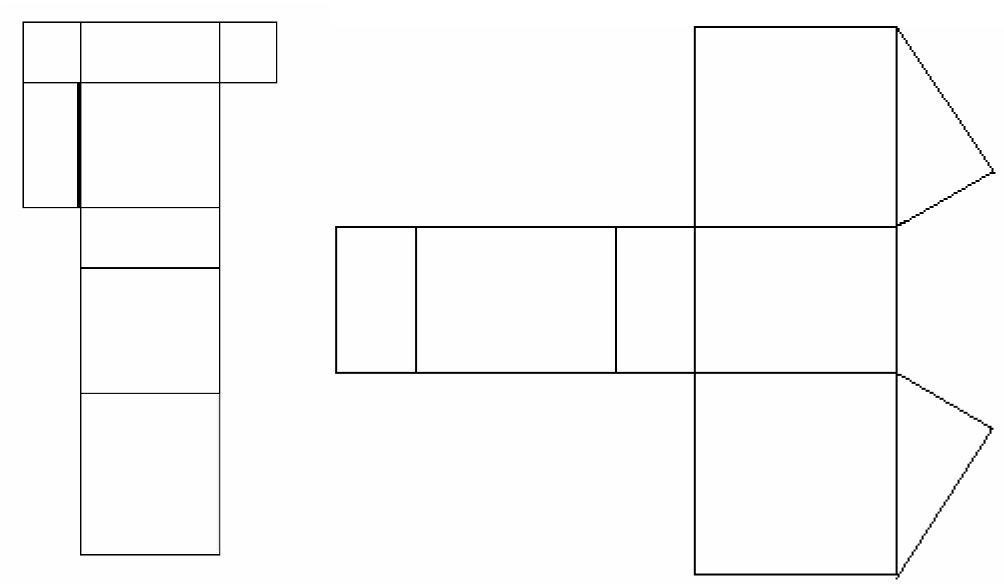
Fazit

Bei der Kirche St. Johann handelt es sich um eine romanische Kirche, die aber durch Umbauten auch gotische Merkmale aufweist.

5. Station - Qualität des Wassers

Mit Flaschen oder Gläsern werden Wasserproben aus dem Rhein genommen. Diese werden gut verschlossen und eingepackt.
Erst in der Schule wird das Wasser dann untersucht.
Diese Aufgabe ist eher eine fächerübergreifende Zusatzaufgabe, die zum Beispiel in der Schule im Biologieunterricht weiter bearbeitet werden könnte. Diese Station könnte zum Beispiel im NWA Unterricht beim Thema „Wasser“ gewählt werden.

6. Station - Skaterplatz



Bei der Beschreibung der Bewegungen sind die unterschiedlichen Beschleunigungen auf der gesamten Strecke zu berücksichtigen.

7. Station - Station Rhein 1

→ Wie schnell fließt der Rhein?

Zwei Schülerinnen und Schüler stehen am Rheinufer einige Meter voneinander entfernt. Diese Entfernung wird genau festgelegt.
Einer der Schüler hat eine Stoppuhr in der Hand, der Andere einen Stock oder ein anderes Hilfsmittel aus der Natur. Nun wirft der Schüler, der weiter oben am Rheinufer steht, den Stock in den Rhein. Der Schüler, der weiter Fluss abwärts steht, stoppt die Zeit, die der Stock braucht, bis er bei ihm vorbei schwimmt.

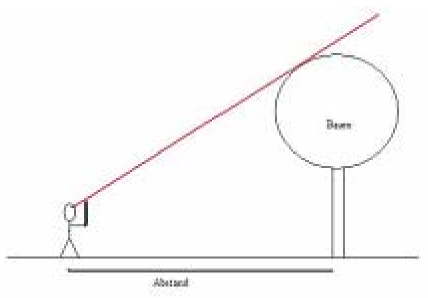
Nun haben die Schüler alle wichtigen Größen, um die Geschwindigkeit des Wassers herauszufinden (Weg und Zeit). Die Strömung des Rheins ist nicht immer stetig die gleiche.

Exemplarische Rechnung:

Abstand zwischen zwei Personen: 10 m
Dauer bis Holzstück von einer zur anderen Person geschwommen ist: 7s
Daraus folgt die Fließgeschwindigkeit des Wassers: 10:7=1,43[m/s] → **5,15 [km/h]**

→ Wie hoch ist der Baum?

Auf dem Weg am Rhein entlang Richtung Rheinfall sind viele Bäume zu sehen. Bei dieser Aufgabe suchen die Schüler zusammen einen Baum, welcher ihnen ins Auge fällt. Nun geht es darum, die Höhe des Baumes herauszubekommen. Allein mit einem Lineal oder Metermaß ist dies natürlich fast nicht möglich. Auf welche Idee könnten die Schülerinnen und Schüler kommen?
Sie können, den Abstand, in dem sie zum Baum stehen, vorher und nachher messen. Dies kann durch Abschreiten erfolgen oder mit einem Metermaß. Hierzu sollten Maßband, Geodreieck usw. bereitgehalten werden. Mit dem Strahlensatz kann man die Höhe des Baumes errechnen.
Skizze:



Rechnung:
Die Länge des Armes : Länge des Stabes = Abstand : Baumhöhe
Eine weitere Möglichkeit wäre: Ein Schüler stellt sich direkt neben den Baum; ein anderer fotografiert den kompletten Baum mit einer Digitalkamera. Dann wird die Größe des Schülers neben dem Baum gemessen und anschließend auf dem Display oder auf einem Laptop die Größe des Schülers ins Verhältnis mit der Höhe des Baumes gesetzt.
Eine dritte Möglichkeit, bei der ein Stock, ein Metermaß und ganz viel Platz benötigt wird, wäre:
Der Stock wird im ausgestreckten Arm, wie bei meinem ersten Lösungsvorschlag, gehalten. Ein Auge wird zugehalten und mit dem anderen versucht man den Stock mit dem Baum ganz abzudecken, so dass der Stock so groß ist wie der Baum. Ggf. muss man hierfür einige Schritte nach vorne oder zurück gehen, bis der Stock und Baum die gleiche Höhe zu haben scheinen.

Abb. 3

Dann wird der Stock zur Seite gekippt.

Abb. 4 [2]

Entweder man merkt sich jetzt, an welcher Stelle das Ende des Stocks auf dem Boden ist oder eine zweite Person stellt sich dort hin.

Abschließend wird die Strecke von der Person bis zum Baum gemessen.

8. Station - Rhein 2 Einspurige Brücke

Zunächst sammle ich alle für mich wichtigen Daten.

Direkt vor Ort messbar:

Länge der Brücke: 96 m

Länge eines PKW: ca. 4 m

Länge eines LKW: ca. 8 m

Abstand von PKW zu PKW, bzw. PKW zu LKW fahrend

Annahme: Abstand ca. 2 m

Abstand von PKW zu PKW, bzw. PKW zu LKW stehend

Annahme: Abstand ca. 1 m

[2] Abb. 3 und 4 aus: http://confetti.orf.at/?tivi=forscherxpress&slideshow=142&print=1

Länge der Strecken auf beiden Seiten der Brücke bis zur nächsten Kreuzung (wichtig zu wissen, damit es keinen Rückstau gibt)

Auf der Schaffhauser Seite: ca. 750 m

Auf der Zürcher Seite: ca. 600 m

Weitere Überlegungen:

Geschwindigkeit mit der ein PKW, bzw. ein LKW über die Brücke fährt

Aus eigener Erfahrung: ca. 30km/h

Fahren auch bei Gelb noch Fahrzeuge über die Brücke?

Meine Annahme: Nein

Verhältnis PKW : LKW

7 : 1 ($\rightarrow$ 1 Fahrzeuggespann)

Was fange ich nun mit den Daten an?

Anzahl der Fahrzeuge, die maximal bis zur nächsten Kreuzung stehen können:

$7 \cdot 4 + 1 \cdot 8$ = 36[m] (Länge von 7 PKW und 1 LKW)

36 + $8 \cdot 1$= 42[m] (Länge der Fahrzeuge + Sicherheitsabstand)

Auf der Schaffhauser Seite können also

750 $\div$ 42 = 17,86 also 17 Fahrzeuggespanne bis zur nächsten Kreuzung stehen.

Auf der Zürcher Seite können

600 $\div$ 42 = 14,29 also 14 Fahrzeuggespanne bis zur nächsten Kreuzung stehen.

Dauer bis ein Fahrzeug die Brücke überquert hat:

Geschwindigkeit 30 km/h; Länge der Brücke 96m

Rechnung:

1km = 1000m; 1h = 60min = 3600s

3600s = 30000m

x = 96m

$\rightarrow$ **x = 11,52s**

Ein Fahrzeug benötigt 11,52s um die Brücke zu überqueren.

Wie soll nun die Ampel geschaltet werden, damit nicht mehr Fahrzeuge die Brücke überqueren, als vor die Kreuzung passen - also damit kein Auto die Brücke überqueren kann, das die festgelegte Höchstanzahl vor der Kreuzung übersteigt.

Auf der Zürcher Seite können weniger Fahrzeuge stehen als auf der Schaffhauser Seite. Deshalb ist die Schaltung von der Zürcher Seite abhängig.

14 Fahrzeuggespanne benötigen welche Zeit?

$14 \cdot 42$ = 588[m] (Länge aller Fahrzeuggespanne auf der Zürcher Seite)

jedes Fahrzeug braucht also 11,52s um die Brücke zu überqueren.

Anzahl der Fahrzeuge:

14 Gespanne á 1 LKW und 7 PKW

→ Anzahl LKW: 14 → Anzahl PKW: 98 (14 Gespanne * 7 PKW)

Fahrzeuge gesamt: 14 LKW + 98 PKW = 112 Fahrzeuge

Dauer bis ein Fahrer reagiert und losfährt ca. 3s

Alle Fahrzeuge brauchen also:

$11{,}52 + 0{,}03 \cdot 112$ = 14,88[s]

Achtung Fehlerquelle!

$11{,}52 \cdot 112$ = 1290,24[s]

→ **also 21,50 min**

Die Überlegung „wenn ein Auto 11,52s benötigt, dann brauchen 112 Fahrzeuge 21,50 min“ . bedeutet, dass immer nur ein Auto über die Brücke fährt und das nächste erst danach losfährt. In der Realität fährt aber das erste Fahrzeug los und die anderen folgen nur mit einem kleinen Zeitabstand (Trägheit, Ziehharmonikaeffekt). Bei dieser Berechnung wurde eine Verzögerung von 3s angenommen, so dass und alle Fahrzeuge zusammen etwa 15s benötigten.

Ist dieses Ergebnis sinnvoll?

Eher nicht. Es gibt weitere Faktoren, die man noch hätte mit einbeziehen müssen, wie die Tatsache, dass nicht immer so viele Autos an der Ampel warten bis diese umschaltet. Selbst die Tatsache, dass die Autos bis zur nächsten Kreuzung stehen ist höchstwahrscheinlich nur im Feierabendverkehr gegeben. Der Weg, bis ein Fahrzeug überhaupt erst die Brücke in der Fahrzeugschlange erreicht, wurde ebenfalls nicht mitberücksichtigt.

Es gibt aber auch noch andere Faktoren, die das Ergebnis beeinflussen. Was ist zum Beispiel sonntags, wenn keine LKWs fahren? Usw.

9. Station - Rheinfall

1. Die Brücke

Zunächst werden die wichtigen Daten gesammelt.

Länge der Brücke

Das Geländer ist jeweils 2m lang und somit hat die gesamte Brücke eine Länge von 160m.

Breite der Brücke

Ein Fußweg ist 1,60 m breit, zusammen 3,20 m.

Die Schienen und der Sicherheitsabstand betragen 4,90 m.

Somit hat die Brücke eine Breite von 8,10 m.

Längsseite der Brücke

Wie auf diesem Bild dargestellt ist es leichter die Längsseite als Rechteck zu sehen. Aufgrund der Perspektive der Aufnahme ist dies nicht ganz exakt.

Die Rundbögen sind Halbkreise. Ihr Durchmesser ist in etwa so groß wie 6 Geländerstücke, also $6 \cdot 2$ = 12[m] Die Halbkreise werden von der gesamten Rechtecksfläche abgezogen.

Die Wölbung unterhalb der Brücke wird ausgespart und nicht mit in die Berechnung miteinbezogen.

<u>Flächeninhalt eines Kreises:</u>

$$A = \pi\ r^2$$
$$= \pi \cdot 36$$
$$= 113{,}1[m^3]$$

$\rightarrow \quad \frac{1}{2}$ **Kreis hat also A = 56,50[m³]**

<u>Flächeninhalt der Längsseite der Brücke:</u>

Höhe 4m bis zum Pfeiler

Länge der Brücke 160m, also $160 \cdot 4$ = **640[m²]**

<u>Anzahl der Bögen: </u>9 Stück

<u>Flächeninhalt der Längsseite beträgt also: </u> 640 – $(9 \cdot 56{,}50)$ = **131,5[m²]**

Flächeninhalt beider Längsseiten: $2 \cdot 131{,}5$ = **263[m²]**

Grundfläche der Pfeiler

Ein Pfeiler ist auf einer Seite so breit wie 2 Geländerteile, also $2 \cdot 2m$ = 4 m
und so breit, wie die gesamte Brücke, also 8,10 m.
Somit hat der Pfeiler eine Grundfläche von $4 \cdot 8{,}10$ = 32,40 m^2

Diese Information ist nur wichtig wenn das Rechteck bis zur Wasseroberfläche reicht und nicht nur bis zu den Pfeilern.

Dicke der Brücke

Die Brücke ist beim Fußweg etwa 0,16m dick. Jedoch nur etwa 10 cm tief, ab da wird die Brücke dicker.

Mit diesen Angaben wird der Flächeninhalt bestimmt und davon die Grundfläche der Pfeiler abgezogen.

Oberfläche der gesamten Brücke

$$(160 \cdot 8{,}10) + 2 \cdot (160 \cdot 0{,}16) + 2 \cdot (160 \cdot 0{,}10) + (2 \cdot 263) = \mathbf{1905{,}20[m^2]}$$

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler überlegen, wie viele Farbeimer sie brauchen. Dabei sollen sie darauf achten, dass fast kein Rest Farbe übrig bleibt.
Für 1m^2 werden 5l Farbe gebraucht. $1905{,}20 \cdot 5$ = **9526[l]**

Insgesamt werden 9526 l Farbe gebraucht.

Wie viele Eimer Farbe werden also mindestens gebraucht?
Die Zahl 599 passt 15mal in 9526 es bleibt der Rest 541
Die Zahl 90 passt 6 mal in 541 es bleibt der Rest 1
Für diesen Rest 1 muss wiederum ein Eimer verwendet werden. Am Günstigsten ist hier dann abermals ein 90 Liter Eimer. Es bleibt ein Rest von 89.
15 Eimer zu je 499l
7 Eimer zu je 90l verbraucht.

Die Kosten betragen in diesem Beispiel

$$15 \cdot 699{,}90 + 7 \cdot 150{,}20$$
$$= 10498{,}5 + 1051{,}4$$
$$= 11549{,}9[€]$$

mit einem Rest von 89l.

Ist dies eine sinnvolle Entscheidung?

Weitere Möglichkeiten:

2) Wenn man statt 15 Eimern mit 599 l jetzt 16 nimmt, sind es gesamt 9584l Farbe. Hier liegt der Überschuss an Farbe bei 58 l.

Die Kosten liegen bei $16 \cdot 699{,}90$ =11198,40[€]

3) Verbraucht man 63 Eimer mit 150l so bleibt ein Rest Farbe von 76l.

Die Kosten liegen hier bei $63 \cdot 326{,}80 = 20588{,}40$

4) Wenn nur 90l Eimer verwendet werden 105 Eimer verbraucht man mit Rest von 76l.

Die Kosten betragen dann $105 \cdot 150{,}20 = 15771$

Gegenüberstellung der Farbreste und der Kosten:

Anzahl Eimer mit 599l	**Anzahl Eimer mit 250l**	**Anzahl Eimer mit 90 l**	**Farbreste**	**Kosten in €**
15		7	89 l	11549,90
16			58 l	11198,40
	63		76 l	20588,40
		105	76 1	15771

Welches Möglichkeit sollte nun gewählt werden?

Die zweite Möglichkeit bietet sich wegen des geringsten Preises und der geringste Farbreste an. Der Rest kann gut für Reparaturen verwendet werden. Er reicht für $58 \div 5 = 11{,}60$ m².

Aber auch die erste Möglichkeit ist preislich gesehen gut. Der Preisunterschied zur zweiten Möglichkeit beträgt nur 11549,90 – 11198,40 = 351,50[€]. Die dritte Möglichkeit ist preislich eher nicht attraktiv. Die letzte Möglichkeit lässt den selben Rest wie die dritte, kostet jedoch etwa 1000 € weniger.

2. Volumen des Rheinfalls

Die Orientierungstafeln befinden sich auf beiden Seiten des Rheinfalls. Sie informieren über die durchschnittliche Abflussmenge im Sommer und Winter und über die Größe des Rheinfalls. Im unteren Teil der Tafel ist der Text auch in andere Sprachen übersetzt.

Zur Lösung der Aufgabe muss zunächst überlegt werden, welches Volumen eine Badewanne etwa hat.

Weiterhin sind Minuten in Sekunden umzurechnen: 1 Minute hat 60 Sekunden, eine halbe Stunde hat 30 Minuten und somit $30 \cdot 60$ = 1800 Sekunden

Wie viel Wasser fließt dann im Sommer bzw. im Winter in einer halben Stunde?

$600 \cdot 1800$ = 1080000 [m³] Sommer

$250 \cdot 1800$ = 450000 [m³] Winter

Wie viele Badewannen können nun gefüllt werden?

Eine Badewanne hat etwa ein Volumen von 80[dm³] → 0,08[m³]

Sommer:

1080000 ÷ 0,08 = 13500000

Winter:

450000 ÷ 0,08 = 5625000

Im Sommer könnten 13500000 und im Winter 5625000 Badewannen mit dem Wasser einer halben Stunde gefüllt werden.

Weitere Fragen:

Wie viele Schwimmbäder könnten gefüllt werden? etc.

4. Literatur- und Abbildungsverzeichnis

Literatur:

- Schindler, Fabienne (2007). Eine mathematische Wanderung von Schaffhausen nach Neuhausen am Rheinfall - Konzeption eines Unterrichtsprojekts für die Realschule, wissenschaftliche Hausarbeit, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd 2007
- Beckmann, A., (2003): Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Teil1, Berlin

Abbildungen:

Die Abbildungen und Fotos in den Aufgaben stammen – soweit nicht anders angegeben – jeweils von den Autoren.

- Stadtbild von Schaffhausen: http://www.holidays-switzerland.ch/bilder/20070719_schaffhausen/Bilder/schaffhausen_1_JPG.jpg
- Abbildung 1 und 2: search.ch TeleAtlas
- http://confetti.orf.at/?tivi=forscherxpress&slideshow=142&print=1
- http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Plan.bastion.boulevard.Schaffhausen.png

Internetseite zum mathematischen Weg

www.mathematischer-weg.ph-gmuend.de